

1. Функцију преноса

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{20}{(s+1)[(s+3)^2 + 16]}$$

раставити у суму парцијалних разломака

(10 бодова)

Олако уочавамо да имамо пар конјуговано комплексних болова:

$$(s+3)^2 + 16 = (s+3)^2 - j^2 4^2$$

Значи имамо пар болова са реалним делом -3 и коимле кацањем $\pm j4$.

Провера: $(s-p_1)(s-p_2)$

$$(s+3-j4)(s+3+j4)$$

$$= (s+3)^2 - j^2 4^2$$

$$= (s+3)^2 + 16 = s^2 + 6s + 25$$

Значи представљање је најједноставније да следећи начин:

$$G(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+6s+25}$$

Олако уочавамо:

$$\frac{A(s^2+6s+25) + (Bs+C)(s+1)}{(s+1)(s^2+6s+25)}$$

на лаке добијемо:

$$\frac{(A+B)s^2 + (6A+B+C)s + (25A+C)}{(s+1)(s^2+6s+25)}$$

из услова за једнакост бројила са следе једначи.

$$A+B=0 \rightarrow A=-B$$

$$\left. \begin{array}{l} 6A+B+C=0 \\ 25A+C=20 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 6A-A+C=0 \\ 25A+C=20 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$20A=20$$

$$\boxed{A=1}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{B=-A=-1}$$

$$\text{из } 6A+B+C=0$$

$$\Rightarrow \boxed{C=-5}$$

Значи имамо разлог:

$$\boxed{G(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{s+5}{(s+3)^2 + 16}}$$

2. Одредите одзив система $y(t)$ који је описан функцијом преноса

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{20}{s+5},$$

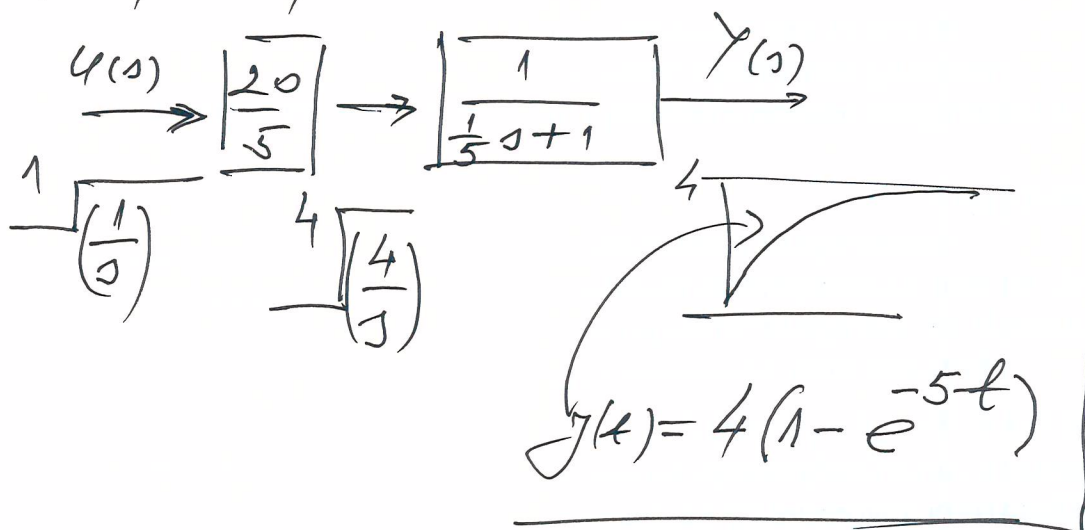
ако је на његов улаз доведена јединична одскачна функција.

(10 бодова)

За ово није потребно ни растављање у суму парцијалних разломака (чак и ако знамо да је одзив система првог реда $G(s) = \frac{1}{Ts+1}$ на степен побуду $U(s) = \frac{1}{s}$ $y(t) = 1 - e^{-t/T}$)

Можемо написати:

$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{20}{5} \cdot \frac{1}{\frac{1}{5}s+1}$, значи ми имамо серијску везу:



3. За система описан функцијом преноса

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+1}{s^2+5s+6},$$

одредите модел у простору стања

(10 бодова)

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+1}{s^2+5s+6} \cdot \frac{C(s)}{C(s)} \Rightarrow \begin{aligned} Y(s) &= s \cdot C(s) + C(s) \\ U(s) &= s^2 C(s) + 5s C(s) + 6 \cdot C(s) \end{aligned}$$

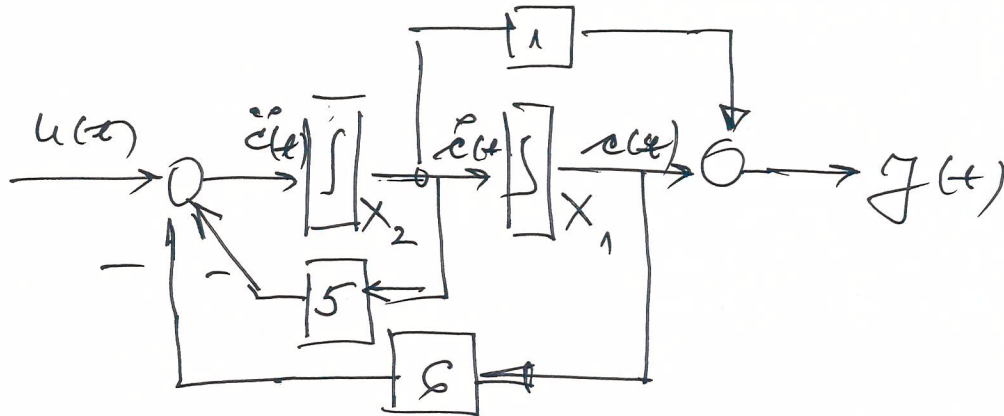
ако узимамо почетним условима батни:

$$\dot{y}(t) = \dot{c}(t) + c(t)$$

$$u(t) = \ddot{c}(t) + 5\dot{c}(t) + 6 \cdot c(t)$$

$$\text{Значи } \ddot{c}(t) = u(t) - 5\dot{c}(t) - 6c(t)$$

Синтактна шема:



$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = u(t) - 6x_1(t) - 5x_2(t)$$

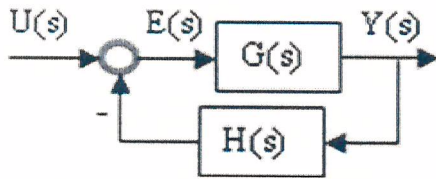
$$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

или у матричном облику

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

4. За систем према слици



одредити комплексни лик сигнала грешке $E(s)$ и његову вредност у стационарном стању када је побуђен јединичном одскочном функцијом за случај када су:

а) $G(s) = \frac{5}{s+1}$, $H(s) = 1$

б) $G(s) = \frac{1}{s}$, $H(s) = \frac{s(s+1)}{(s+2)^2}$

в) $G(s) = \frac{1}{s+1}$, $H(s) = \frac{s}{(s+2)}$
(15 бодова)

Функција обрнутог преноса:

$$W(s) = G(s) \cdot H(s)$$

Функција सरегнутог преноса по сигналу грешке:

$$\frac{E(s)}{U(s)} = \frac{1}{1 + W(s)}$$

та је комплексни лик $E(s)$

$$E(s) = \frac{1}{1 + W(s)} \cdot \frac{1}{s}$$

Грешка у стационарном стању за системе астати-зма првог реда је

~~$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s W(s)$$~~

$$e(\infty) = \frac{1}{1 + K_p}$$

при чему је $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} (W(s))$

за конкретне случајеве имамо:

а) $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{5}{s+1} \cdot 1 \right) = 5$

та је $e(\infty) = \frac{1}{1+5} = \frac{1}{6}$

б) $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{1}{s} \cdot \frac{s(s+1)}{(s+2)^2} \right) = \frac{1}{4}$

та је $e(\infty) = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{4}{5}$

в) $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{1}{s+1} \cdot \frac{s}{s+2} \right) = 0$

та је $e(\infty) = \frac{1}{1+0} = 1$

5. Одредите стабилност система
применом Хурвицовог критеријума ако
је његов карактеристични полином:

$$f(s) = s^3 + s^2 + 4s + 4 = 0$$

Образложите ваш одговор

(нестабилан, стабилан, на граници
апериодске стабилности или на граници
осцилаторне стабилности).

(10 бодова)

Видимо да су сви коефицијенти истог знака,
односно Хејвунцев је неопходан услов.

Проверимо Добован услов:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \Delta_1 &= 1 > 0 \quad \checkmark \\ \Delta_2 &= 1 \cdot 4 - 1 \cdot 4 = 0 \end{aligned}$$

значи имамо 1 бајла
на имагинарној оси

Ово је услов који јасно указује да се
систем налази на граници осцилаторне
стабилности.

6. Одредите услове стабилности система, применом Раусовог критеријума, ако је његов карактеристични полином:

$$f(s) = s^3 + 5s^2 + (K-6)s + K = 0$$

(10 бодова)

$$\left. \begin{array}{c|ccc} s^3 & 1 & (K-6) & 0 \\ s^2 & 5 & K & 0 \\ s^1 & b_1 & b_2 & 0 \\ s^0 & c_1 & & \end{array} \right\}$$

$$b_1 = - \frac{\begin{vmatrix} 1 & (K-6) \\ 5 & K \end{vmatrix}}{5}$$

$$b_1 = \frac{5(K-6) - K}{5}$$

мора бити $b_1 > 0$
Да систем буде
СТАБИЛАН

значи:

$$5(K-6) - K > 0$$

$$5K - 30 > K$$

$$4K - 30 > 0$$

$$K > \frac{30}{4}$$

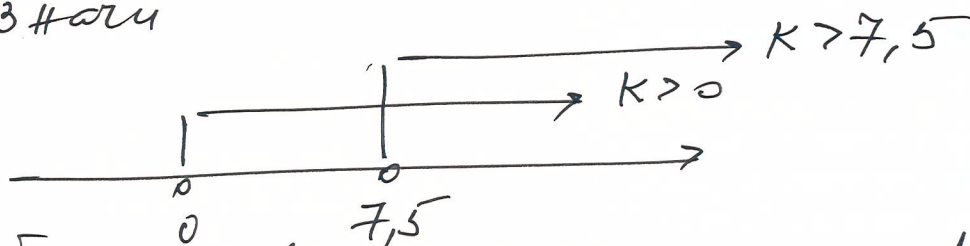
$$\boxed{K > 7,5}$$

$$\boxed{b_2 = 0} \quad \text{јер је } b_2 = - \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}}{b_1}$$

$$c_1 = - \frac{\begin{vmatrix} 5 & K \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1}$$

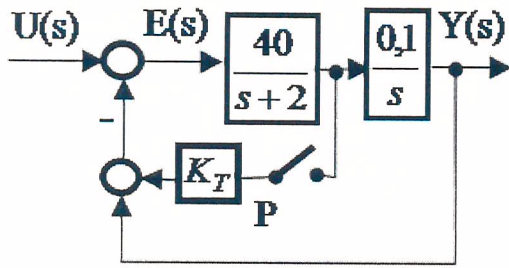
$$c_1 = \cancel{b_1} \cdot \frac{K}{\cancel{b_1}} = K \rightarrow \boxed{K > 0}$$

значи



О ба у с ло ва су и ст у де на за К > 7,5 !

7. За систем према слици



а) одредите фреквенцију непригушених осцилација и коефицијент пригушења за случај када је прекидач Р отворен,

б) одредите вредност појачања K_T тако да коефицијент пригушења, након затварања прекидача Р, буде $\xi = \sqrt{2}/2$ (15 бодова)

Решење:

$$\text{а) } \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{40}{s+2} \cdot \frac{0,1}{s}}{1 + \frac{40}{s+2} \cdot \frac{0,1}{s}}$$

$$= \frac{4}{s^2 + 2s + 4}$$

Како је функција преноса за систем другог реда

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

из једнакости

$$s^2 + 2s + 4 = s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2$$

следе

$$\omega_0^2 = 4 \rightarrow \omega_0 = 2$$

$$2\zeta\omega_0 = 2 \rightarrow \zeta = \frac{1}{2}$$

б) када је затворен имамо 100% повратну спрегу па је:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{40}{s+2} \cdot \frac{0,1}{s}}{1 + \frac{40 \cdot 0,1}{s(s+2)} + K_T \cdot \frac{40}{s+2}}$$

$$= \frac{4}{s^2 + (2 + 40K_T)s + 4}$$

како је ка осцилову

$$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 = s^2 + (2 + 40K_T)s + 4$$

$$2\zeta\omega_0 = 2 + 40K_T$$

$$\omega_0^2 = 4 \rightarrow \omega_0 = 2$$

Како се захтева да буде $\zeta = \sqrt{2}/2$ добијате

$$2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 = 2 + 40K_T$$

$$\sqrt{2} = 1 + 20K_T$$

$$\text{односно } K_T = \frac{\sqrt{2} - 1}{20} \approx 0,2$$

Видимо да K_T утиче само на коефицијент пригушења ζ .