

Испит из АУТОМАТСКОГ УПРАВЉАЊА 2 (А група)
(07. 09. 2017. год.)

НАПОМЕНА : Сваки задатак вреди десет бодова

1. За систем описан функцијом преноса

$$G(s) = \frac{4s^2 + 2s}{2s^3 + 6s^2 + 4s + 2}$$

формирајте модел у простору стања у контролабилној каноничној форми.

РЕШЕЊЕ:

Најпре је неопходно извршити скалирање функције преноса тако да коефицијент уз s^3 буде један. Затим се након увођења помоћне променљиве $C(s)$ добија:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s^2 + s}{s^3 + 3s^2 + 2s + 1} \frac{C(s)}{C(s)}$$

Из овога следе две једначине

$$Y(s) = 2s^2 C(s) + s C(s)$$

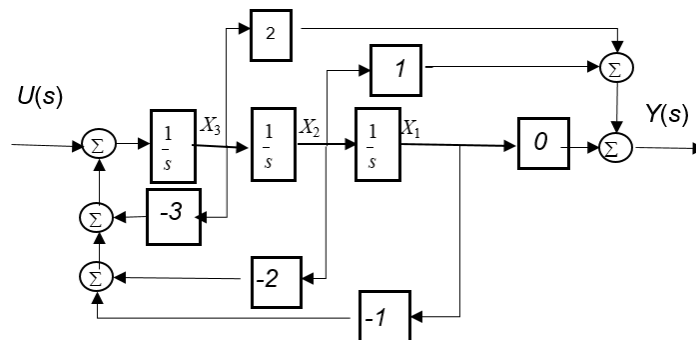
$$U(s) = s^3 C(s) + 3s^2 C(s) + 2s C(s) + C(s)$$

Након примене инверзне Лапласове трансформације, уз претпоставку нултих почетних услова, следе једначине

$$y(t) = 2\ddot{c}(t) + \dot{c}(t)$$

$$\ddot{c}(t) = u(t) - 3\dot{c}(t) - 2c(t) - c(t)$$

на основу којих се формира симулациони модел:



У складу са симулационим моделом добија се модел у простору стања:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

2. За систем описан функцијом преноса

$$G(s) = \frac{s + 4}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

Испит из АУТОМАТСКОГ УПРАВЉАЊА 2 (А група)
(07. 09. 2017. год.)

формирајте модел у простору стања у опсервабилној каноничној форми.

РЕШЕЊЕ:

Након дељења променљивом са највишом потенцијом, односно са s^3 добија се:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{1}{s^2} + \frac{4}{s^3}}{1 + \frac{6}{s} + \frac{11}{s^2} + \frac{6}{s^3}}$$

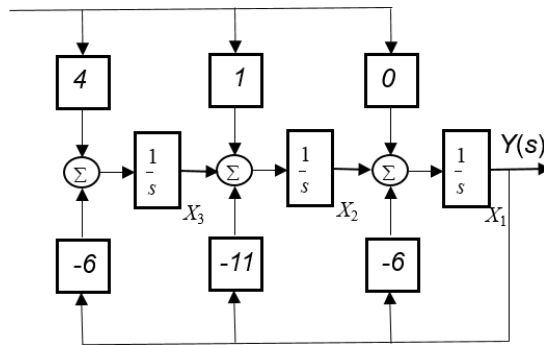
Из овога следе једначине

$$Y(s) \left(1 + \frac{6}{s} + \frac{11}{s^2} + \frac{6}{s^3} \right) = U(s) \left(\frac{1}{s^2} + \frac{4}{s^3} \right)$$

$$Y(s) = -\frac{6}{s}Y(s) + \frac{1}{s^2}(U(s) - 11Y(s)) + \frac{1}{s^3}(4U(s) - 6Y(s))$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} \left(-6Y(s) + \frac{1}{s} \left(U(s) - 11Y(s) + \frac{1}{s}(4U(s) - 6Y(s)) \right) \right)$$

на основу којих се формира симулациони модел:



У складу са симулационим моделом добија се модел у простору стања:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 0 \\ -11 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

3. Нацртајте Бодеве дијаграме за систем чија је функција повратног преноса

$$W(s) = \frac{10s + 1}{(0,1s + 1)(s + 1)}$$

РЕШЕЊЕ:

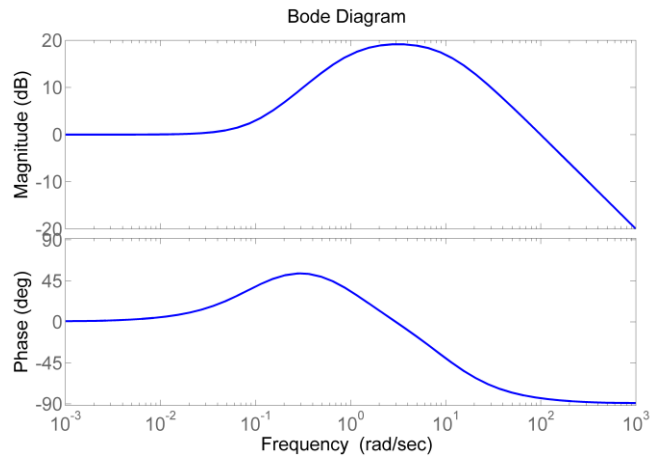
Конкретна функција повратног преноса садржи нулу $s_n = -0,1$ и два пола

$s_{p1} = -10$, $s_{p2} = -1$. Њима на $\log(w)$ оси одговарају преломне фреквенције

$w_n = 0,1 \text{ rad/s}$, $w_{p1} = 10 \text{ rad/s}$, $w_{p2} = 1 \text{ rad/s}$. На основу амплитудних и фазних

карактеристика које одговарају нули и полу добијају се Бодеве дијаграми

Испит из АУТОМАТСКОГ УПРАВЉАЊА 2 (А група)
(07. 09. 2017. год.)



4. За систем описан функцијом повратног преноса $W(s) = \frac{K}{s(s+1)^2}$ одредити појачање K тако да амплитудна резерва буде $m = 2$.

РЕШЕЊЕ:

С обзиром да амплитудна резерва представља количник $m = \frac{K}{d}$ где је

$$d = \operatorname{Re} \left\{ \frac{W(j\omega)}{K} \right\}_{\omega=\omega_{-m}}. \text{ При томе се } \omega_{-m} \text{ одређује из услова } \operatorname{Im}\{W(j\omega)/K\} = 0$$

Након смене $s = j\omega$ добија се

$$\frac{W(s)}{K} = \frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{1}{j\omega(j\omega+1)^2} = \frac{-j}{\omega(1+j\omega)^2} \frac{(1-j\omega)^2}{(1-j\omega)^2} = -j \frac{(1-\omega^2) - j2\omega}{\omega(1^2 + \omega^2)^2}$$

па су реални и имагинарни делови дефинисани једначинама:

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{W(j\omega)}{K} \right\} = -\frac{2}{(1^2 + \omega^2)^2} \quad \operatorname{Im} \left\{ \frac{W(j\omega)}{K} \right\} = -\frac{(1-\omega^2)}{\omega(1^2 + \omega^2)^2}$$

Очигледно $\operatorname{Im}\{W(j\omega)/K\} = 0$ када је $\omega=1$. Тада се за $\omega=1$ добија да је $\operatorname{Re}\{W(j\omega)/K\} = 1/2$, односно $d = 1/2$.

Коначно из $m = \frac{K}{d}$ следи $K = \frac{1}{md} = 1$.

5. За систем описан функцијом повратног преноса $W(s) = \frac{K}{s(s+1)}$ одредити појачање K тако да фазна резерва буде $\gamma = 30^\circ$.

Испит из АУТОМАТСКОГ УПРАВЉАЊА 2 (А група)

(07. 09. 2017. год.)

РЕШЕЊЕ:

Најпре уочимо да у случају када је $\gamma = 30^\circ$ за имагинарни и реални део функције повратног преноса важе односи који се срећу у случају једнакостраничног троугла, односно

$$\tan(30^\circ) = \frac{\operatorname{Re}\{W(jw)/K\}}{\operatorname{Im}\{W(jw)/K\}} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

При томе су a и h дужине које одговарају страници и висини једнакостраничног троугла.

Након увођења смене $s = jw$ у функцију повратног преноса добија се:

$$\frac{W(s)}{K} = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{jw(jw+1)} = \frac{-j}{w(1+jw)} \frac{(1-jw)}{(1-jw)} = -\frac{w+j}{w(1^2+w^2)}$$

па су реални и имагинарни делови дефинисани једначинама:

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{W(jw)}{K}\right\} = -\frac{1}{(1^2+w^2)} \quad \operatorname{Im}\left\{\frac{W(jw)}{K}\right\} = -\frac{1}{w(1^2+w^2)}$$

На основу већ дефинисаног услова за $\gamma = 30^\circ$ следи

$$\frac{\operatorname{Re}\{W(jw)/K\}}{\operatorname{Im}\{W(jw)/K\}} = \frac{1}{w} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

односно добија се да је тада $w = \sqrt{3}$.

С обзиром да на основу дефиниције фазне резерве стабилности следи услов:

$$\frac{1}{K^2} = (\operatorname{Re}\{W(jw)/K\})^2 + (\operatorname{Im}\{W(jw)/K\})^2$$

$$\text{При } w = \sqrt{3} \text{ добија се да је } K^2 = \frac{1}{\left(\frac{1}{(1^2+3)}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}(1^2+3)}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{4^2}\left(1+\frac{1}{3}\right)} = 4 \cdot 3$$

односно $K = 2\sqrt{3}$.

6. За систем описан моделом у простору стања

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

одредити вредности матрице K тако да након затварања повратне спреге по стањима има коефицијент пригушења $\xi = \sqrt{2}/2$ и фреквенцију слободних осцилација $w_o = 8/\sqrt{2}$.

РЕШЕЊЕ:

Из услова $\det(sI - A + BK) = s^2 + 2\xi w_s + w^2$

следи

Испит из АУТОМАТСКОГ УПРАВЉАЊА 2 (А група)
(07. 09. 2017. год.)

$$\begin{vmatrix} s+1+10k_1 & 10k_2 \\ 10k_1 & s+2+10k_2 \end{vmatrix} = s^2 + 2\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{8}{\sqrt{2}}s + \frac{64}{2}$$

односно

$$(s+1+10k_1)(s+2+10k_2) - 10^2 k_1 k_2 = s^2 + 8s + 32$$

$$s^2 + (2+10k_2)s + 2+10k_2 + 20k_1 + 10^2 k_1 k_2 - 10^2 k_1 k_2 = s^2 + 8s + 32$$

$$s^2 + (2+10k_2)s + 2+10k_2 + 20k_1 = s^2 + 8s + 32.$$

Изједначавањем коефицијената полинома добија се систем једначина

$$2+10k_2 = 8$$

$$2+10(k_2 + 2k_1) = 32$$

Коначно решење система једначина даје матрицу

$$K = [k_1 \quad k_2] = [12/10 \quad 6/10].$$

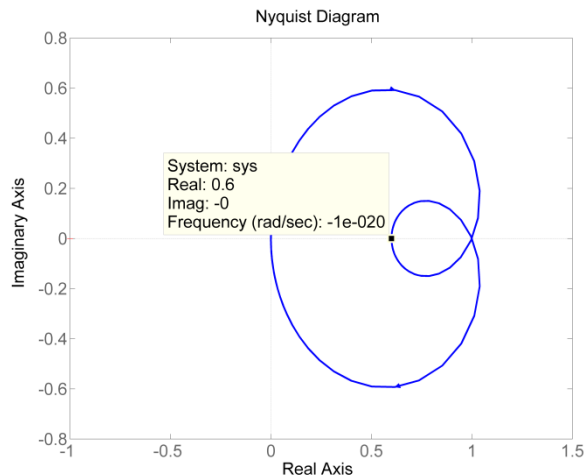
7. Нацртајте Никвистов дијаграм за систем описан функцијом повратног преноса

$$W(s) = \frac{4s+3}{s^2+4s+5}$$

и одредите фреквенцију на којој фазно кашњење има вредност нула.

РЕШЕЊЕ:

Функција повратног преноса поседује реалну нулу $s_n = -3/4$ и пар коњуговано-комплексних полова $s_{p1,2} = -2 \pm j1$. С обзиром да су полови смештени у левој полуравни комплексне равни систем са отвореним колом повратне спреге је стабилан. Имајући у виду да се број полова разликује за један у односу на број нула одговарајући дијаграм завршава под углом од -90° кад фреквенција тежи бесконачности а почиње у тачки $T = (0,6; j0)$ при нултој фреквенцији.



Никвистов дијаграм

8. Нацртајте Никвистов дијаграм за систем описан функцијом повратног преноса

$$W(s) = \frac{K(s+3)}{(s-1)(s+2)}$$

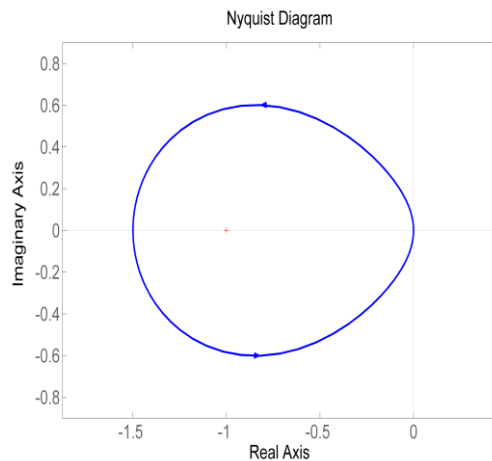
и одредите услов да систем са јединичном негативном повратном спрегом буде стабилан.

Испит из АУТОМАТСКОГ УПРАВЉАЊА 2 (А група)
(07. 09. 2017. год.)

РЕШЕЊЕ:

С обзиром да функција повратног преноса поседује један пол десно од имагинарне осе биће неопходно да Никистова крива направи обилазак око критичне тачке $(-1/K; j0)$, за π радијана у смеру супротно од кретања казаљке на сату, када се фреквенција мења од 0 до бесконачности.

Имајући у виду да се број полова разликује за један у односу на број нула одговарајући дијаграм завршава под углом од -90° кад фреквенција тежи бесконачности а почиње у тачки $T = (-3/2; j0)$ при нултој фреквенцији.



Никвистов дијаграм

Имајући у виду да крива $W(j\omega)/K$, за фреквенцију $\omega=0$, почиње у тачки $(-3/2; j0)$ вредност коефицијента статичког појачања која обезбеђује да ће систем бити стабилан, након затварања кола повратне спреге, мора да испуни услов:

$$-\frac{3}{2} < -\frac{1}{K} \quad \text{односно} \quad \frac{3}{2} > \frac{1}{K} \quad \text{одакле коначно следи } K > 2/3.$$